

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

בחינה בתורת הקבוצות (80200)

מועד א' תשס"ד

משך הבחינה: שעתיים

שם המורה: פרופ' ב. ווייס

מס' סטודנט: _____

מס' מחברת: _____

חלק א: ענה של שתי השאלות הבאות. יש לסמן בטופס הבחינה את התשובה הנכונה.

(כל שאלה 20 נק')

1. במרוצת ההוכחה של משפט קנטור-ברנשטיין מטפלים במקרה פרטי שבו יש העתקה חח"ע f מקבוצה X לתוך X , שאיננה על, ומנסים לבנות העתקה חח"ע ועל בין X ל- Y כאשר Y קבוצה בין X ל- $f(X)$. מגדירים באינדוקציה

$$A_0 = f(X), A_{n+1} = f(A_n), \dots, A_\omega = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n.$$

ציינו אלו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות:

- i. תמיד A_ω היא הקבוצה הריקה. ☐ נכון; ☐ לא נכון.
- ii. f מעתיקה את A_ω על A_ω . ☐ נכון; ☐ לא נכון.
- iii. הקבוצות $\{A_n \setminus A_{n+1} : n \geq 0\}$ זרות. ☐ נכון; ☐ לא נכון.
- iv. $\bigcup_{n=0}^{\infty} (A_n \setminus A_{n+1}) = X \setminus A_0$. ☐ נכון; ☐ לא נכון.
- v. $f|_{A_\omega}$ היא חח"ע. ☐ נכון; ☐ לא נכון.

2. תוך כדי ההוכחה שאקסיומת הסדר הטוב גוררת את הלמה של צורן משתמשים

במספר טענות ביניים על קבוצות סדורות חלקית וסודרים.

ציין אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות:

- i. לכל קבוצה סדורה חלקית $(X, <)$ יש סדר α והעתקה $f : X \rightarrow \alpha$, שהיא חח"ע ועל ושומרת סדר. ☐ נכון; ☐ לא נכון.
- ii. אם β סודר ו- $B \subset \beta$ (הכלה ממש) אזי B שקולה לרישא של איבר ב β . ☐ נכון; ☐ לא נכון.

המשך ←

iii. בקבוצה $(X, <)$ הסדורה חלקית ומקיימת את הנחת הלמה של צורן,

לכל שרשרת יש חסם עליון. ☐ נכון; ☐ לא נכון.

iv. אם α סודר ו- $C \subseteq \alpha$ שרשרת אזי יש ל- C חסם עליון ב- α .

☐ נכון; ☐ לא נכון.

v. $(X, <)$ קבוצה סדורה חלקית המקיימת את ההנחות של הלמה של

צורן, $|X| > 1$ אז או $\{\emptyset\} \in X$ או $\emptyset \in X$.

☐ נכון; ☐ לא נכון.

חלק ב: ענה של 5 שאלות מתוך 6. יש לסמן בטופס הבחינה את התשובה הנכונה

(כל שאלה 4 נק')

1. תהיינה X ו- Y שתי קבוצות. אזי $X \times Y \in P(P(X \cup Y))$.

☐ נכון; ☐ לא נכון

2. תהי $(X_n : n \geq 1)$ סדרה אינסופית של קבוצות כך שלכל $n \in \mathbb{N}$, $|X_n| = \aleph_0$, אזי

$\left| \bigtimes_{n \geq 1} X_n \right| = \aleph$ (המכפלה הקרטזית האינסופית) וכאשר $\aleph$ מונה של הרצף.

☐ נכון; ☐ לא נכון.

3. יהי $(X, \leq)$ קבוצה סדורה ליניארית ותהי $f : X \rightarrow X$ פונקציה חח"ע מ- X ל- X .

f השומרת סדר, אזי לכל $x \in X$ מתקיים $f(x) \geq x$.

☐ נכון; ☐ לא נכון.

4. יהי α סודר אזי $\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \beta$. ☐ נכון; ☐ לא נכון.

5. יהי α, β סודרים כך ש- $|\alpha| = |\beta| = \aleph_0$. תהי α^β החזקה שלהם כסודרים, אזי

$|\alpha^\beta| = \aleph_0$. ☐ נכון; ☐ לא נכון.

6. יהיו $\{c_a\}_{a \in A}, \{d_a\}_{a \in A}$ משפחות של קרדינלים כך ש- $1 < |A|$ ולכל $a \in A$, $c_a > 1$

וגם $d_a \geq c_a$ אזי $\sum_{a \in A} c_a < \prod_{a \in A} d_a$. ☐ נכון; ☐ לא נכון.

המשך ←

חלק ג: ענה של 5 שאלות מתוך 6. סמן בטופס הבחינה את התשובה הנכונה. (כ"א 8 נק')

1. יהיו X, Y קבוצות כאשר $X = \emptyset$ אזי $Y^X = ?$:

i. ☐ $\emptyset$.

ii. ☐ $\{\emptyset\}$.

iii. ☐ Y .

iv. ☐ אף אחת מהאפשרויות הנ"ל אינה נכונה.

2. תהי $f: X \rightarrow X$ פונקציה מ- X ל- X . לכל $n \in \mathbb{N}$ נסמן $f^{(n)} = f \circ \dots \circ f$ כאשר בצד

ימין f מופיע n פעמים. כמו כן נניח שלכל $x \in X$ קיים $n(x) \in \mathbb{N}$ כך ש-

$$f^{n(x)}(x) = x$$

i. ☐ f היא חח"ע אך לא תמיד על.

ii. ☐ f היא על אך לא תמיד חח"ע.

iii. ☐ f היא חח"ע ועל.

iv. ☐ f יכולה להיות על או חח"ע או שניהם.

3. הקבוצה $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ עם יחס הסדר הלקסיקוגרפי מקימת:

i. ☐ סדורה חלקית אבל לא לינארית.

ii. ☐ סדורה היטב אבל לא בת-מנייה.

iii. ☐ סדורה לינארית אבל לא היטב.

iv. ☐ סדורה חלקית בת-מנייה.

4. לאיזה מהסודרים הבאים שווה הסודר $12 \cdot \omega + \omega \cdot 25 + 25 \cdot \omega^9 + 1990$?

i. ☐ ω^9 .

ii. ☐ $\omega^9 + \omega \cdot 26$.

iii. ☐ $\omega^9 + \omega \cdot 37$.

iv. ☐ $25 \cdot \omega^9$.

5. יהיו α, β סודרים כאשר $\alpha \neq \emptyset, \beta \neq \emptyset$, מהי הטענה הנכונה תמיד:

i. ☐ $\alpha \times \beta > \beta$.

ii. ☐ $\alpha^\beta > \beta$.

iii. ☐ $\alpha + \beta > \alpha$.

iv. ☐ $\alpha \times \beta > \alpha$.

6. יהיו $A, B \subset X$, נסמן A^c המשלים של A ב- X אזי $A \Delta B = ?$.

i. ☐ $(A \cup B) \setminus (A \cap B^c)$.

ii. ☐ $(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$.

iii. ☐ $A^c \Delta B$.

iv. ☐ $(A^c \cup B) \cap (B^c \cup A)$.

בהצלחה!